Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 5 im Wintersementer 2020/21 (am 27.11.20)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	Verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
Vorlesung x, y.z	Verweist auf den Abschnitt y.z im Text zu Vorlesung x.

6 Irreduzible affine Varietäten

6.0 Vormerkung

Nach Aussage 5.4 (iii) ist die Vereinigung

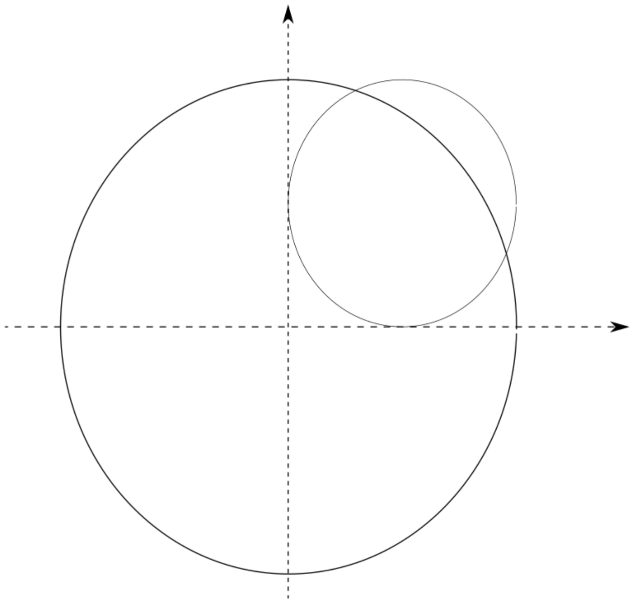
$$Y \cup Z$$

zweier affiner Varietäten Y und Z des k^n eine affine Varietät. Sind zum Beispiel

$$Y = V(x^2+y^2 - 4) \subseteq k^2 \text{ und } Z = V((x-1)^2+(y-1)^2 - 1) \subseteq k^2$$

zwei Kreise in der Ebene mit verschiednen Mittelpunkten und Radien, so ist die Vereinigung

$Y \cup Z$



eine komplizierter aufgebaute Menge als jeder der beidein einzelnen Kreise. Es ist deshalb naheliegend, danach zu fragen, ob sich dieser Prozeß der Vereinigung umkehren läßt, d.h. ob eine gegebene algebraische Varietät Y Vereinigung echter abgeschlossener Teilvarietäten ist, sagen wir

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r ,$$

wobei man sich die Y_i als einfacher aufgebaut denkt als Y. Und man fragt nach den in diesem Sinne einfachsten Varietäten. Dies führt zum Begriff der irreduziblen Varietät, mit dem wir uns jetzt befassen wollen. Die wichtigsten Konstruktionen in diesem Kontext funktionieren nicht nur für affine Varietäten, sondern hängen von einer wichtigen Eigenschaft der Zariski-Topologie des k^n ab: es handelt sich um einen sogenannten noetherschen topologischen Raum.

6.1 Noethersche Ringe und noethersche topologische Räume

Ein kommutativer Ring A mit 1 heißt noethersch, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Jedes Ideal von A ist endlich erzeugt.

(ii) Jede aufsteigende Kette

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \dots$$

von Idealen von A ist stationär, d.h. es gibt ein n_0 mit

$$I_n = I_{n+1} \text{ für jedes } n \geq n_0.$$

(iii) In jeder nicht-leeren Menge $\{I_\alpha\}$ von Idealen von A gibt es ein maximales Element, d.h. es gibt ein α_0 mit $I_\alpha \subseteq I_{\alpha_0}$ für jedes α.

Ein topologischer Raum X heißt noethersch, wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(iv) In jeder Familie von offenen Mengen von X gibt es ein maximales Element.

(v) In jeder Familie von abgeschlossenen Mengen von X gibt es ein minimales Element.

Beweis der Äquivalenz der Bedingungen (i)-(iii).

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Die I_n eine aufsteigende Kette von Idealen bilden, liegen jeweils endlich viele Elemente von I in ein I_n. Deshalb ist I ein Ideal von A. Nach Voraussetzung ist I endlich erzeugt, sagen wir

$$I = (a_1,\dots,a_n)\bullet A.$$

Zu den endlich vielen a_i gibt es ein n mit

$$a_1,\dots,a_n \in I_n.$$

Weil I_n ein Ideal ist, folgt

$$I = (a_1,\dots,a_n) \subseteq I_n \subseteq I_{n'} \subseteq I$$

für $n \leq n'$. Es folgt $I_n = I_{n'}$ für alle $n' \geq n$, wie behauptet.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Angenommen, es gibt eine nicht-leere Menge S von Idealen von A ohne maximales Element. Weil S nicht leer ist, gibt es ein $I_1 \in S$. Weil I_1 nicht maximal ist in S gibt es ein $I_2 \in S$ mit

$$I_1 \subset I_2.$$

Weil I_2 nicht maximal ist in S gibt es ein $I_3 \in S$ mit

$$I_2 \subset I_3.$$

Diese Argumentation läßt sich beliebig wiederholen und führt zu einer echt aufsteigenden (nicht-stationären) Kette von Idealen

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$$

von A, im Widerspruch zu Annahme (ii). Dieser Widerspruch zeigt, es gilt (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Angenommen, es gibt ein Ideal $I \subseteq A$, welches nicht endlich erzeugt ist. Dann ist I von 0 verschieden, d.h. es gibt ein Element

$$x_1 \in I - 0.$$

Wir setzen

$$I_1 := x_1 A.$$

Weil I nicht endlich erzeugt ist, ist I von I_1 verschieden, d.h. es gibt ein Element

$$x_2 \in I - I_1.$$

Wir setzen

$$I_2 := (x_1, x_2) \cdot A.$$

Diese Argumentation läßt sich beliebig wiederholen und führt zu einer echt aufsteigenden (nicht-stationären) Kette von Idealen

$$I_n = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A.$$

In der Menge dieser Ideale ist keine maximal, im Widerspruch zur Annahme (iii). Dieser Widerspruch zeigt, jedes Ideal von A ist endlich erzeugt.
QED.
Bemerkungen
(i) Jeder Körper ist noethersch.
(ii) Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch der Polynomring A[T] in endlich vielen Unbestimmten noethersch (nach dem Hilbertschen Basissatz, vgl. S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965, Kapitel V, §2, Theorem 1).
Insbesondere ist der Koodinatenring k[T] des k^n noethersch.
(iii) Seien A ein kommutiver Ring mit 1, $I \subseteq A$ ein Ideal von A und $\rho: A \longrightarrow A/I$ die natürliche Abbildung auf den Faktorraum. Dann ist die Abbildung

$$\{\text{Ideale von } A/I\} \longrightarrow \{\text{Ideale von } A\},\ J \mapsto \rho^{-1}(J),$$

wohldefiniert, injektiv und erhält Inklusionen "$\subseteq$". Deshalb ist mit A auch A/I noethersch. Insbesondere sind endlich erzeugte Algebren über einem noetherschen Ring noethersch.
(iv) Für jeden noetherschen Ring A ist

$$\mathrm{Spec}\ A$$

ein noetherscher Raum. Das folgt aus Aussge (vii) und Bemerkung (ii) von 5.4, d.h. aus der Äquivalenz

$$V(I) \supseteq V(J) \Leftrightarrow \sqrt{I} \subseteq \bigcap \sqrt{J}\ .$$

Nach Bemerkung 5.4 (iii) gibt es eine injektive Abbildung

$$\beta: \begin{Bmatrix} \text{abgeschlossene Mengen} \\ \text{von Specm } A \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \text{abgeschlossene Mengen} \\ \text{von Spec } A \end{Bmatrix},$$

Mit Spec A ist deshalb auch Specm A noethersch für jeden noetherschen Ring A.

6.2 Definition der Irreduzibilität (Kapitel I, Definition 1.2.1)

Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum. Dann heißt X reduzibel, wenn X Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen ist,

$$X = Y \cup Z \text{ mit } Y, Z \text{ abgeschlossen und echt enthalten in } X.$$

Andernfalls heißt X irreduzibel. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt irreduzibel, wenn sie es bezüglich der induzierten Topologie ist.

6.3 Eigenschaften irreduzibler Mengen (Kapitel I, Aussage 1.2.3)

Seien X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge.
(i) Folgende Aussagen sind äquivalent.
(a) A ist irreduzibel.
(b) Die Abschließung $\overline{A}$ ist irreduzibel.

(ii) Ist f: X $\longrightarrow$ Y eine stetige Abbildung (topologischer Räume), so ist mit A auch f(A) irreduzibel.

6.4 Zerlegung in irreduzible Komponenten (Kapitel I, Aussage 1.2.4)
Sei X ein noetherscher topologischer Raum. Dann gibt es in X nur endlich viele maximale irreduzible Teilmengen, sagen wir

$$X_1, \ldots, X_s .$$

Diese sind abgeschlossen und überdecken X,

$$X = X_1 \bigcup \ldots \bigcup X_s .$$

Läßt man ein X_i auf der rechten Seite weg, so hört das Gleichheitszeichen auf zu gelten (falls X_i nicht mehrfach vorkommt). Insbesondere gilt

(i) Jede irreduzible Teilmenge Y von X liegt ganz in einem X_i.

(ii) Für jede Darstellung

$$X = Y_1 \bigcup \ldots \bigcup Y_t$$

von X als Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen Y_i kommen unter den Y_i alle X_i vor (und die übrigen kann man weglassen.

Die maximalen irreduziblen Teilmengen X_i von X heißen <u>irreduzible Komponenten</u> von X.

Beweis. Nach 6.3 (a) sind die maximalen irreduziblen Teilmengen von X abgeschlossen.

<u>1. Schritt</u>. X ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen.

Wir betrachten die Menge

$$M := \left\{ Y \subseteq X \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Y ist abgeschlossen in X, aber nicht} \\ \text{Vereinigung von endlich vielen} \\ \text{abgeschlossenen irreduzibelen Teilmengen} \end{array} \right\}$$

Es reicht zu zeigen, X liegt nicht in dieser Menge. Dazu reicht es zu zeigen, diese Menge ist leer. Angenommen sie ist es nicht. Nach Definition des noetherschen topologischen Raums in 6.1 enthält sie dann ein minimalen Element, sagen wir A. Die Menge A ist, weil sie in M liegt, reduzibel, d.h. sie ist Vereinigung von zwei echten abgeschlossenen Teilmengen, sagen wir

$$A = A' \bigcup A''.$$

Wegen der Minimalitätseigenschaft von A liegen A' und A" nicht in M. Sie sind deshalb beide Vereinigung von endlich vielen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen. Dann gilt dasselbe aber auch für deren Vereinigung, d.h. A liegt nicht in M. Dies steht im Widerspruch zu Wahl von A. Die Menge M muß also leer sein.

<u>2. Schritt</u>. Sei $X = Y_1 \bigcup \ldots \bigcup Y_t$ mit Y_i irreduzibel und abgeschlossen. Dann liegt jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge Y von X ganz in einem der Y_i .

Wir können annehmen, daß kein Y_i ganz in einem anderen Y_i liegt. Wir bilden den Durchschnitt mit Y und erhalten

$$Y = (Y_1 \bigcap Y) \bigcup \ldots \bigcup (Y_s \bigcap Y).$$

Weil Y irreduzibel ist, gibt es ein i mit

$$Y = Y_i \bigcap Y,$$

also $Y \subseteq Y_i$.

3. Schritt. Abschluß des Beweises.
Nach dem ersten Schritt gibt es eine Zerlegung

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$$

mit X_i irreduzibel und abgeschlossen für jedes i. Nach dem zweiten Schritt liegt jede maximale irreduzible Teilmenge von X ganz in einem X_i und ist damit gleich einem X_i. Die Anzahl der maximalen irreduziblen Teilmengen von X ist damit endlich, und jede dieser maximalen irreduziblen Teilmengen kommt als ein X_i in der obigen Vereinigung vor. Jedes X_i, welches nicht maximal ist, liegt in einer größeren irreduziblen abgeschlossenen Teilmenge Y von X, welche ihrerseit nach dem zweiten Schritt in einem X_j liegt,

$$X_i \subsetneq Y \subseteq X_j.$$

Es ist dann $i \neq j$, d.h. X_i kann weggelassen werden. Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen - einschließlich Aussage (i). Aussage (ii) ist nun eine Folge des zweiten Schritts.
QED.

6.5 Kriterium für Irreduzibilität (Kapitel I, Aussage 1.2.5)

Eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq V := k^n$ (bezüglich der Zariski-Topologie) ist genau dann irreduzibel, wenn I(X) ein Primideal ist.

7 Zusammenhang

Für die lineare algebraischen Gruppen ist noch ein weiterer Begriff von zentraler Bedeutung: der des zusammenhängenden topologischen Raums. Wie wir demnächst sehen werden, ist eine algebraische Gruppe genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.

7.1 Definition (Kapitel I, Definition 1.2.7)

Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn er nicht als Vereinigung von zwei disjunkten und abgeschlossenen echten Teilmengen geschrieben werden kann. Damit ist jeder irreduzible Raum zusammenhängend.

Argumentationen, die nachweisen sollen, daß ein Raum X zusammenhängend ist, laufen meistens auf den Beweis der folgenden Implikation hinaus:

$$X = A \cup B \text{ mit A und B disjunkt und abgeschlossen in X} \Rightarrow X = A \text{ oder } X = B.$$

Zwei Teilmengen A, B eines topologischen Raums X heißen getrennt, wenn keine der beiden einen Berührungspunkt der anderen enthält, d.h. wenn gilt

$$A \cap \overline{B} = \emptyset = B \cap \overline{A}.$$

Sind die Mengen abgeschlossen in X, so bedeutet dies einfach, daß sie disjunkt sind. Eine zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums X, welche in keiner echt größeren zusammenhängenden Teilmenge von X enthalten ist, heißt Zusammenhangskomponente von X.

7.2 Eigenschaften (Kapitel I, 1.2.7 und 1.2.8)

(i) Die Abschließung einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.
(ii) Sei $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in I}$ eine Familie von zusammenhängenden Teilmengen eines topologischen Raums X. Keine zwei der Y_α seien getrennt. Dann ist

$$Y = \bigcup_{\alpha \in I} Y_\alpha$$

zusammenhängend.

(iii) Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen.
  (a) Jede zusammenhängende Teilmenge von X (z.B. jeder Punkt) liegt in einer Zusammenhangskomponente von X.
  (b) Je zwei Zusammenhangskomponenten von X sind getrennt.
  (c) Jede Zusammenhangskomponente von X ist abgeschlossen in X.

(iv) Ein noetherscher Raum X besitzt nur endlich viele Zusammenhangs-komponenten.

(v) Jede Zusammenhangskomponente eines noetherschen topologischen Raums X ist Vereinigung von irreduziblen Komponenten.

(vi) Eine abgeschlossene Teilmenge $X \subseteq V = k^n$ ist genau dann unzusammenhängend, wenn es zwei echte Ideale I', I" von k[T] gibt mit

$$I' + I'' = k[T] \text{ und } I' \cap I'' = I(X).$$

(vii) Sei $X = \{(x,y) \in k^2 \mid xy = 0\}$. Dann ist X eine abgeschlossene Teilmenge von k^2, welche zusammenhängend ist aber nicht irreduzibel.

Wir beschränken uns auf den **Beweis von** (v), (vi) **und** (vii).

Zu (v). Nach Definition sind irreduzible Mengen zusammenhängend. Haben zwei irreduzible Komponenten von X einen gemeinsamen Punkt, so ist deren Vereinigung zusammenhängend (nach (ii)). Ist eine Vereinigung von irreduziblen Kompoenten zusammenhängend und schneidet sich mit einer weiteren irreduziblen Komponente, so bleibt erstere zusammenhängend, wenn man letztere zu ihr hinzufügt (nach (ii)). Da die Zahl der irreduziblen Komponenten endlich sich, bricht der Prozeß des hinzufügens von irreduziblen Komponenten mit gemeinsamen Punkt nach endlich vielen Schritten ab. Indem man mit verschiedenen Komponenten startet, erhält man verschiedene maximale Vereinigungen von irreduziblen Komponenten, die abgeschlossenen sind und paarweise disjunkt. Die maximalen Vereinigungen sind gerade die Zusammenhangskomponenten von X.

Zu (vi). Die Bedingungen $I'+I'' = k[T]$ und $I' \cap I'' = I(X)$ sind hinreichend.

Wegen $I' \cap I'' = I(X)$ gilt

$$X = V(I(X)) = V(I' \cap I'') = V(I') \cup V(I'').$$

Dabei sind V(I') und V(I") abgeschlossene Teilmengen, welche nicht leer sind (weil I' und I" echte Ideale sind).

Wegen $I' + I'' = k[T]$ gilt weiter

$$V(I') \cap V(I'') = V(I'+I'') = V(k[T]) = \emptyset.$$

Die beiden Teilmengen sind disjunkt, d.h. X ist nicht zusammenhängend.

Die Bedingungen sind notwendig.

Nach Voraussetzung gibt es nicht-leere abgeschlossene Teilmengen Y', Y" von X mit

$$X = Y' \cup Y''.$$

Mit $I' := I(Y')$ und $I'' := I(Y'')$ gilt

$$\emptyset = Y' \cap Y'' = V(I') \cap V(I'') = V(I'+I''),$$

also $\sqrt{I'+I''} = k[T] \ni 1$, also $I'+I'' \ni 1$, also

$$I' + I'' = k[T].$$

Weiter ist

$$V(I(X)) = X = V(I') \cup V(I'') = V(I' \cap I''),$$

also

$$I(X) = \sqrt{I(X)} = \sqrt{I' \cap I''}\ .$$

An den obigen Betrachtungen ändert sich nichts, wenn wir die Ideale I' und I" durch deren Radikale ersetzen. Dann gilt aber zusätzlich $\sqrt{I' \cap I''} = I' \cap I''$, d.h.

$$I(X) = I' \cap I'' .$$

<u>Zu (vii)</u>. X = V(xy) ist die Vereinigung von x-Achse V(y) und y-Achse V(x), also reduzibel.
Weil x und y jeweils Primideale von k[x,y] erzeugen, sind V(x) und V(y) irreduzibel. Sie haben den Ursprung gemeinsam, also ist

$$X = V(x) \cup V(y)$$

zusammenhängend.
QED.

Index

—G—

getrennte Teilmengen, 5

—I—

irreduzible Komponente, 4
irreduzible Teilmenge eines topologischen Raums, 3
irreduzibler topologischer Raum, 3

—K—

Komponente
- irreduzible, 4
- Zusammenhangs-, 5

—N—

noetherscher Ring, 2
noetherscher topologischer Raum, 2

—R—

Raum
- noetherscher topologischer, 2

reduzibler topologischer Raum, 3
Ring
- noetherscher, 2

—T—

Teilmengen
- getrennte, 5

topologischer Raum
- irreduzibler, 3
- noetherscher, 2
- reduzibler, 3
- zusammenhängender, 5

—Z—

zusammenhängender topologischer Raum, 5
Zusammenhangskomponente, 5

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

6 Irreduzible affine Varietäten 1
- 6.0 Vormerkung 1
- 6.1 Noethersche Ringe und noethersche topologische Räume 2
- 6.2 Definition der Irreduzibilität (Kapitel I, Definition 1.2.1) 3
- 6.3 Eigenschaften irreduzibler Mengen (Kapitel I, Aussage 1.2.3) 3
- 6.4 Zerlegung in irreduzible Komponenten (Kapitel I, Aussage 1.2.4) 4
- 6.5 Kriterium für Irreduzibilität (Kapitel I, Aussage 1.2.5) 5

7 Zusammenhang 5
- 7.1 Definition (Kapitel I, Definition 1.2.7) 5
- 7.2 Eigenschaften (Kapitel I, 1.2.7 und 1.2.8) 5

INDEX 7

INHALT 7